

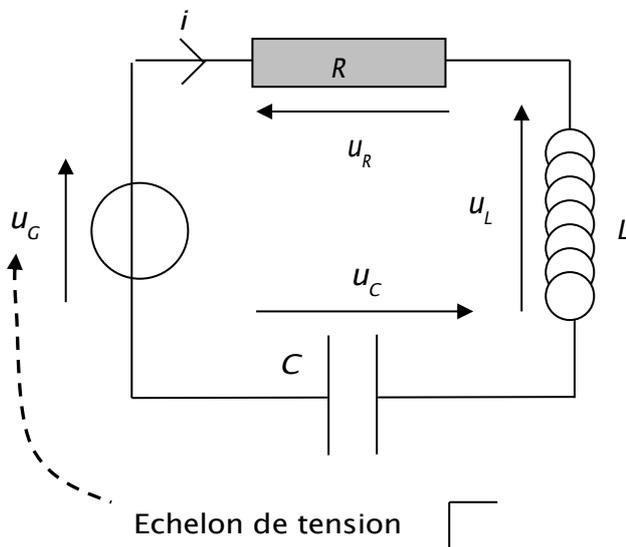
## REPONSE DES CIRCUITS A UN ECHELON DE TENSION: REGIME TRANSITOIRE D'ORDRE 2

Grégoire Lacroix

Dans les circuits électriques, les régimes ont toujours un début. Nous allons étudier comment à partir des conditions initiales, les courants et les tensions s'établissent dans les circuits. Ce chapitre est la suite du chapitre sur les circuits d'ordre 1 d'où la numérotation.

### IV – Réponse à un échelon de tension : circuit d'ordre 2 RLC Série

#### 4.1 Equation différentielle qui gouverne la tension aux bornes du condensateur



$$\text{Loi des mailles : } E = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C.$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \text{ soit :}$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

On obtient une équation différentielle du second ordre.

#### Exercice d'application 3: Circuit équivalent en régime permanent et grandeurs électriques.

A partir de la connaissance du comportement de la bobine et du condensateur en DC, représenter le circuit équivalent au circuit précédent en régime permanent (c'est-à-dire quand  $t \rightarrow +\infty$ , les tensions et courants ne varient plus dans le temps). En déduire  $i(t \rightarrow +\infty)$ ,  $u_L(t \rightarrow +\infty)$ ,  $u_R(t \rightarrow +\infty)$  et  $u_C(t \rightarrow +\infty)$ .

#### **4.2 Ecriture canonique et résolution**

L'équation différentielle précédente peut se mettre, comme en mécanique, sous les formes canoniques usuelles :

$\ddot{u}_c + \frac{1}{\tau} \dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$	$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{LC}} = \text{pulsation propre (s}^{-1}\text{)},$ $\tau \equiv \frac{L}{R} = \text{temps de relaxation (s)}$
$\ddot{u}_c + 2\beta \dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$	$2\beta \equiv \frac{1}{\tau} = \text{coefficient d'amortissement (s}^{-1}\text{)}$
$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$	$Q = \omega_0 \tau = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \text{facteur de qualité (sans dimension)}$

La réponse complète du circuit à l'échelon, c'est-à-dire  $u_c(t)$  peut se mettre, comme vous l'avez vu en mathématiques :

$$\text{Réponse complète : } u_c(t) = \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\text{réponse naturelle : } u_{c\ell}(t)}^{u_{c\ell}(+\infty) \rightarrow 0} \\ \text{Maths } \Rightarrow \text{solution homogène} \\ + \\ \overbrace{\text{réponse forcée : } E}^{u_c(+\infty) = E} \\ \text{Maths } \Rightarrow \text{solution particulière} \end{array} \right.$$

Il nous reste donc à trouver  $u_{c\ell}(t)$  ce qui est le plus délicat.

$u_{c\ell}(t)$  est solution de l'équation différentielle du second ordre sans second membre (équation

homogène) :  $\ddot{u}_{c\ell} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_{c\ell} + \omega_0^2 u_{c\ell} = 0$ . On cherche une solution de la forme  $e^{rt}$  que l'on réinjecte

dans l'équation précédente. On arrive à l'**équation caractéristique** de la forme  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

. Il s'agit à présent d'une équation algébrique. Dans le cas général,  $r$  admet deux solutions  $r_1$  et  $r_2$  qui sont complexes ou réelles, ce qui donne:

$$u_{c\ell}(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t},$$

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des constantes (complexes conjuguées car  $u_{c\ell}(t)$  doit être réelle) que l'on détermine à partir des conditions initiales du problème.

La nature de l'évolution de  $u_{c\ell}(t)$  va dépendre du facteur de qualité  $Q$  donc de l'amortissement du système. En effet selon la valeur de  $Q$ , la nature des racines  $r_1$  et  $r_2$  sera différente.

**a) Régime pseudo périodique** :  $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$

Si  $Q > \frac{1}{2}$  alors  $\beta < \omega_0$ . Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0. \text{ On pose } \Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \text{ avec } \Omega \text{ la pseudo-pulsation.}$$

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{4\beta^2}{\omega_0^2} - 4\right) = 4(\beta^2 - \omega_0^2) = -4\omega^2 < 0$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j2\Omega}{2} = -\beta - j\Omega \\ r_2 = -\beta + j\Omega \end{cases} \text{ et finalement :}$$

$$u_{c\ell}(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{-j\Omega t} + A_2 e^{j\Omega t}).$$

On sait que  $\cos(\Omega t) = \frac{e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}}{2}$  et  $\sin(\Omega t) = \frac{e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t}}{2j}$  ce qui permet de réécrire la solution

sous les formes équivalentes suivantes :

$$u_{c\ell}(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\substack{\text{décroissante exponentielle de} \\ \text{l'amplitude.} \\ \text{(l'énergie du système diminue)}}} \underbrace{(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))}_{\text{facteur oscillant à la pseudo-pulsation } \Omega} = C e^{-\beta t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{avec } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \Rightarrow \omega_0 > \beta$$

$A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $\varphi$  sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (tension initiale  $u_c(0^+)$  et intensité initiale  $i(0^+)$ , par exemple  $i(0^+) = 0$  A et  $u_c(0^+) = 0$  V si le condensateur est déchargé à l'instant initial).

Le système oscille, mais sans être périodique à cause de l'amortissement, jusqu'à ce que le régime transitoire meure pour laisser place au régime permanent. On a un mouvement pseudo-périodique de pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$$

**b) Régime apériodique :**  $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$

Si  $Q < \frac{1}{2}$  alors  $\beta > \omega_0$ .

On pose  $\Omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2$  avec  $\Omega$  la **pseudo-pulsation**.

$$\Delta = 4\Omega^2 > 0$$

On obtient :  $\begin{cases} r_1 = -\beta - \Omega \\ r_2 = -\beta + \Omega \end{cases}$  et finalement :

$$u_{C\ell}(t) = e^{-\beta t} \underbrace{\left( A_1 e^{-\Omega t} + A_2 e^{\Omega t} \right)}_{\text{termes purement exponentiels}}$$

avec  $\Omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \Rightarrow \beta > \omega_0$

$A_1$  et  $A_2$  sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (tension initiale  $u_c(0^+)$  et intensité initiale  $i(0^+)$ ). Le circuit atteint le régime permanent sans osciller car l'amortissement est devenu trop important.

**c) Régime critique :**  $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$

Si  $Q = \frac{1}{2}$  alors  $\beta = \omega_0$ .  $\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2) = 0$ . On peut écrire  $\ddot{u}_{C\ell} + 2\omega_0 \dot{u}_{C\ell} + \omega_0^2 u_{C\ell} = 0$  soit

$\frac{d^2}{dt^2}(u_{C\ell}(t)e^{\omega_0 t}) = 0$ .  $u_{C\ell}(t)e^{\omega_0 t}$  est donc une fonction affine du temps  $u_{C\ell}(t)e^{\omega_0 t} = a + bt$  ce qui

donne :

$$u_{C\ell}(t) = (a + bt)e^{-\beta t}$$

ici  $\beta = \omega_0$

$a$  et  $b$  sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (tension initiale  $u_c(0^+)$  et intensité initiale  $i(0^+)$ ).

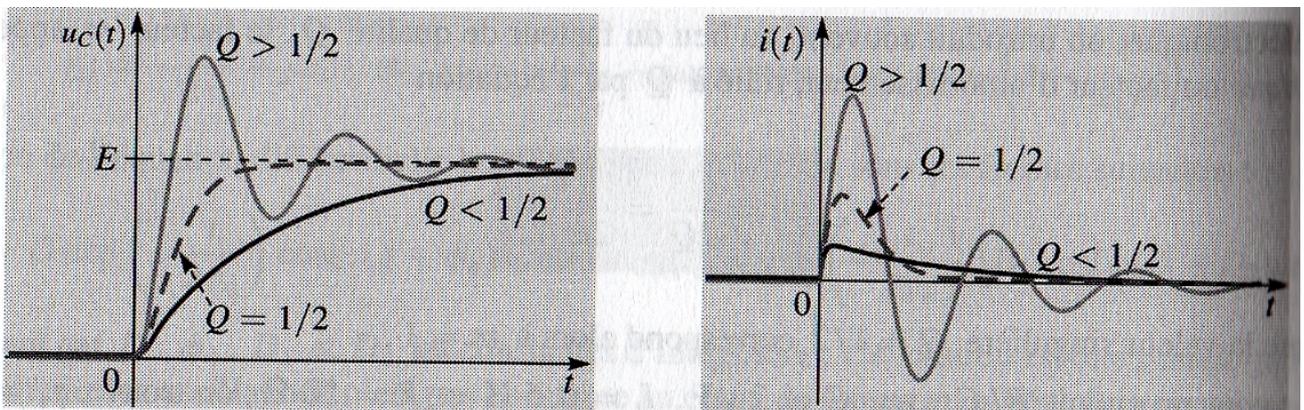
Quand  $Q = \frac{1}{2}$  alors  $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , on parle de **résistance critique**.

Le circuit atteint le régime permanent sans osciller car l'amortissement est devenu trop important. Il s'agit du cas où **l'équilibre (régime permanent) est atteint le plus rapidement**.

#### **d) Les courbes**

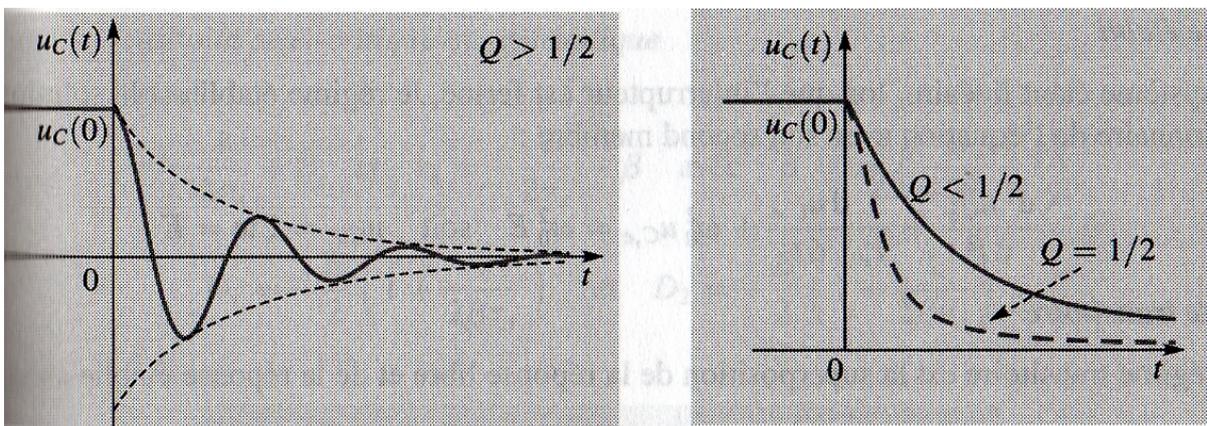
Les figures ci-dessous donnent l'évolution de  $u_c(t) = u_{c_c}(t) + E$  et de  $i(t)$  en fonction du temps.

Pour obtenir  $i(t)$ , il suffit de noter que  $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$ .



Quand  $t \rightarrow \infty$ , le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil sans résistance (bobine idéale) donc  $i \rightarrow 0$  et  $u_c \rightarrow E$ .

Si, à partir de ces nouvelles conditions initiales ( $u_c(0^+) = E, i(0^+) = 0$ ), on débranche le générateur ( $u_G = 0$ ), alors  $u_c$  évolue comme indiqué sur les figures ci-dessous en fonction de la valeur du facteur de qualité (en suivant exactement la même démarche que ce que l'on a fait jusqu'à présent, vous pouvez résoudre ce problème).



### 4.3 Aspects énergétiques

#### a) Réponse à l'échelon de tension

On repart de l'équation différentielle sous sa forme initiale:  $LC\ddot{u}_c + RC\dot{u}_c + u_c = E$  soit

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E$ . On multiplie par  $i$  de chaque côté ce qui donne :  $L\frac{di}{dt}i + Ri^2 + \frac{q}{C}i = Ei$  que l'on

peut réécrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\text{énergie de la bobine à un instant } t} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\text{énergie du condensateur à un instant } t} \right] = \underbrace{-Ri^2}_{\text{puissance dissipée dans la résistance (effet Joule)}} + \underbrace{Ei}_{\text{puissance fournie par le générateur}} .$$

L'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur et la bobine et dissipée dans la résistance.

#### b) Condensateur initialement chargé, absence de générateur (décharge du condensateur)

Si on part des conditions initiales suivantes :  $u_c(0^+) = E$ ,  $i(0^+) = 0$  et  $u_G = 0$  (courbes ci-dessus),

on a :

$$\frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\text{énergie de la bobine à un instant } t} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\text{énergie du condensateur à un instant } t} \right] = \underbrace{-Ri^2}_{\text{puissance dissipée dans la résistance (effet Joule)}} .$$

L'énergie stockée dans le condensateur et la bobine est entièrement dissipée à terme dans la résistance par effet Joule.

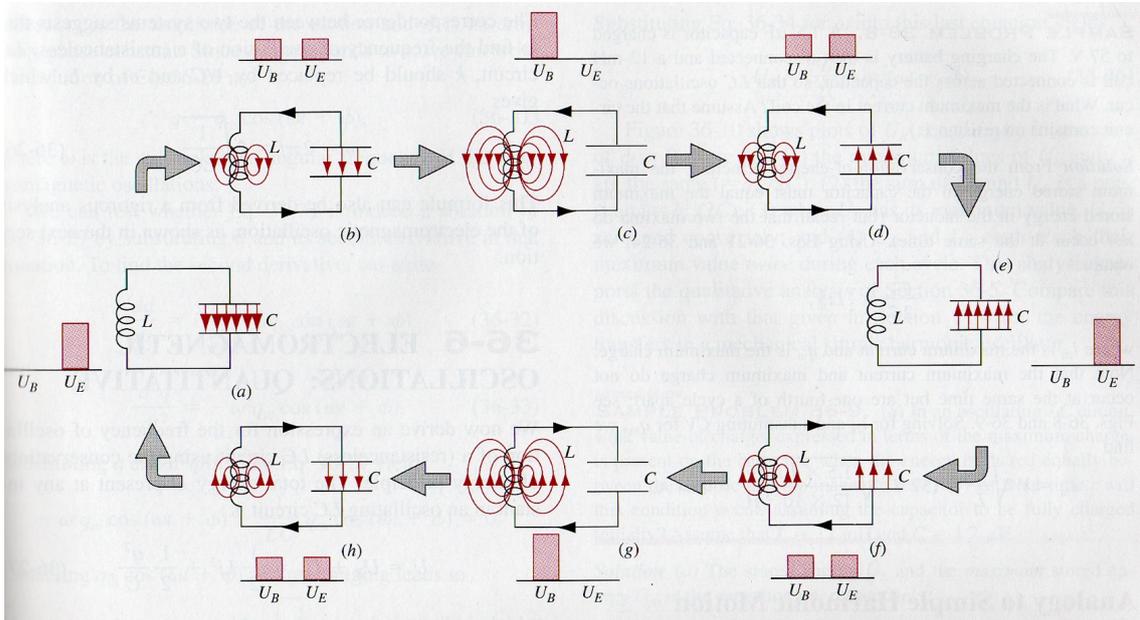
#### c) Condensateur initialement chargé, absence de générateur et absence de résistance.

Si il n'y pas de résistance dans le circuit ( $R = 0$ ) alors :

$$\frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\text{énergie de la bobine à un instant } t} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}_{\text{énergie du condensateur à un instant } t} \right] = 0 .$$

Dans ce cas  $\varepsilon_C + \varepsilon_L = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \text{constante}$  au cours du temps. Il y a échange d'énergie permanent entre le condensateur et la bobine. Vous pouvez facilement montrer que

$\varepsilon_C + \varepsilon_L = \frac{1}{2}CE^2$ . La figure ci-dessous illustre cet échange d'énergie (ce qui est noté  $U_E$  correspond à l'énergie du condensateur  $\varepsilon_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$  et ce qui est noté  $U_B$  correspond à l'énergie de la bobine  $\varepsilon_L = \frac{1}{2}Li^2$ ).

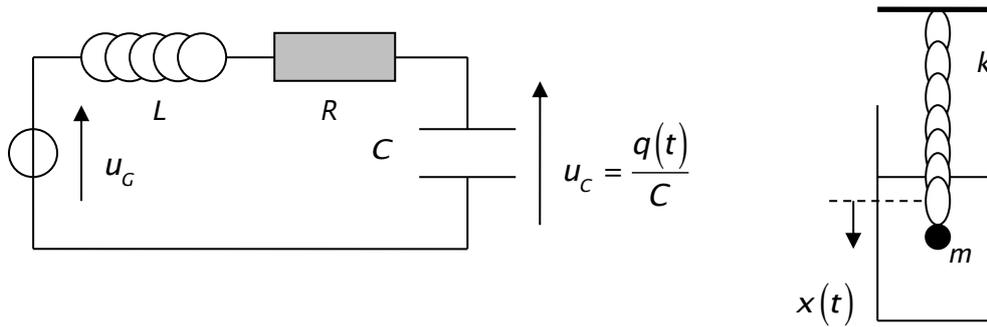


L'énergie présente dans le condensateur est due à la présence d'un champ électrique entre les armatures du condensateur qui est symbolisé par les flèches sur le schéma ci-dessus (cf. cours d'électrostatique en PTSI). L'énergie présente dans la bobine est due à la présence d'un champ magnétique dans les spires de la bobine qui est symbolisé par les flèches sur le schéma ci-dessus (cf. cours d'électromagnétisme en PT). On peut qualifier ce système **d'oscillateur électromagnétique** par analogie avec l'oscillateur mécanique (masse + ressort).

Enfin, pour terminer avec l'aspect énergétique, l'étude que nous avons menée dans le cas de l'oscillateur mécanique et qui nous a conduits à montrer que  $Q = \left| 2\pi \frac{\varepsilon_m}{\Delta\varepsilon_m} \right|$  dans le cas d'un régime pseudopériodique peut se faire de façon totalement analogue dans le cas présent pour l'oscillateur électromagnétique.

## V - Analogie électro-magnéto-mécanique

Il y a analogie entre deux systèmes physiques s'ils sont régis par les mêmes équations différentielles.



Oscillateur électromagnétique	Oscillateur mécanique
$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E$	$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + h \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$
Charge $q$	Elongation $x$
Intensité $i = \frac{dq}{dt}$	Vitesse $v = \frac{dx}{dt}$
Résistance $R$	Coefficient d'amortissement $h$
$L$	$m$
$\frac{1}{C}$	Raideur $k$
$u_L = L \frac{di}{dt}$	$m \frac{dv}{dt}$ (homogène à une force)
$\varepsilon_{\text{bobine}} = \frac{1}{2} Li^2$	$\varepsilon_c = \frac{1}{2} mv^2$
$u_c = \frac{q}{C}$	$kx$ (homogène à une force)
$\varepsilon_{\text{condensateur}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$	$\varepsilon_p = \frac{1}{2} kx^2$
$u_R = Ri$	$hv$ (homogène à une force)
$P = Ri^2$	$P = hv^2$

# VI –Portrait de phase, quelques notions

## 6.1 Généralités

Dans l'étude des systèmes dynamiques (qui présentent une évolution temporelle) comme les oscillateurs amortis (mécaniques ou électriques), nous nous sommes intéressés à l'évolution au cours du temps d'un seul paramètre d'intérêt physique  $x(t)$  ou  $u_c(t)$ . Cependant pour les systèmes dynamiques plus complexes, il ne s'agit pas de la méthode la plus pertinente. Une autre possibilité est de tracer une des grandeurs d'intérêt physique en fonction de sa dérivée première par rapport au temps, c'est ce que l'on appelle le **PORTRAIT DE PHASE**.

Portrait de phase:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Exemple de l'oscillateur amorti mécanique: } \dot{x}(=v) \text{ en fonction de } x \\ \text{Exemple de l'oscillateur amorti électrique: } \dot{u}_c(=i/C) \text{ en fonction de } u_c \end{array} \right.$

Il faut bien comprendre que la variable temporelle n'apparaît pas explicitement dans un portrait de phase, contrairement au tracé d'une évolution temporelle pour laquelle l'abscisse représente le temps. Un tel tracé point par point peut être laborieux. L'utilisation d'un ordinateur simplifie le procédé soit en réalisant une acquisition de valeurs expérimentales, soit en résolvant numériquement les équations différentielles modélisant le système étudié.

## 6.2 Cas d'un oscillateur harmonique (pas de frottement et pas de dissipation d'énergie)

Dans le cas d'un oscillateur harmonique, on obtient le portrait de phase de la figure 15 suivante qui est dans le plan  $(\dot{u}_c, u_c)$  (dit **plan de phase**) une **trajectoire fermée** (qui dans le cas général est une ellipse). L'évolution de l'oscillateur harmonique sur le portrait de phase est **périodique**, à l'image de la trajectoire. La trajectoire n'atteint jamais le centre de l'ellipse qui est la position d'équilibre. Cela signifie qu'il n'y a aucun frottement dans le système considéré, **l'énergie est conservée**, il n'y a pas de dissipation d'énergie (système idéalisé).

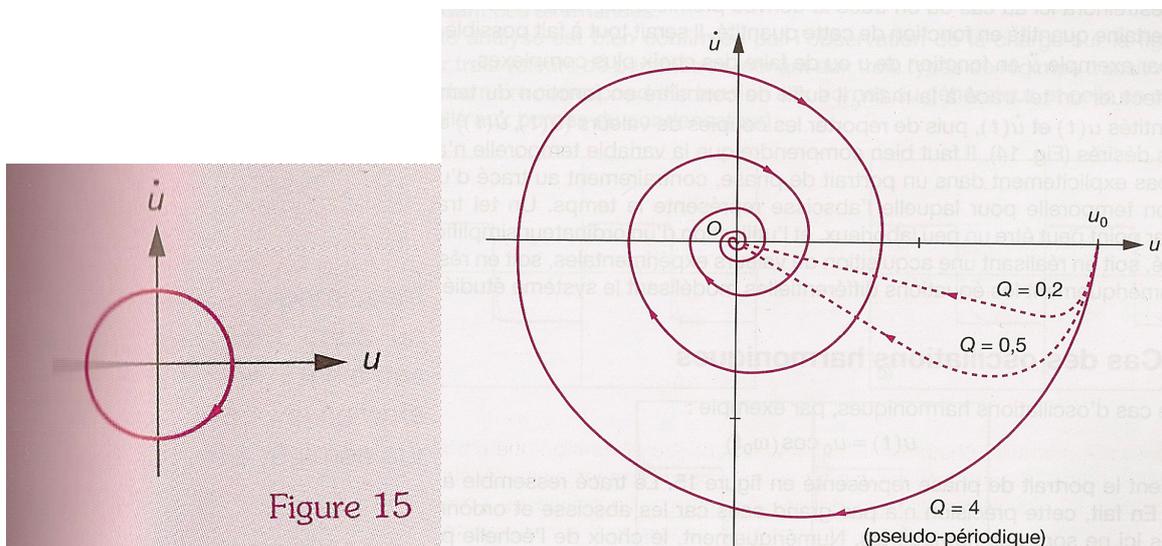


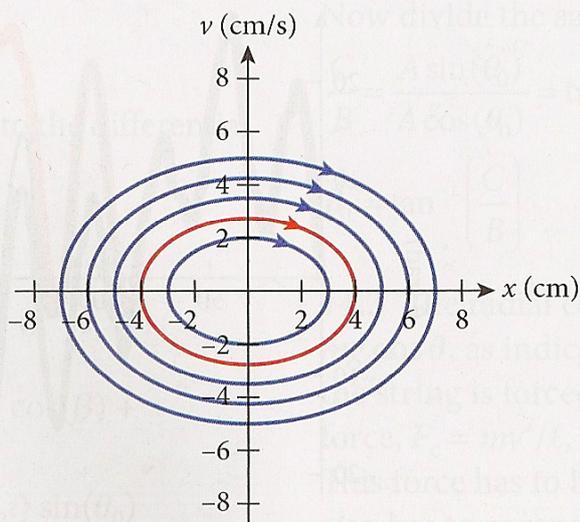
Figure 15

### 6.3 Cas d'un oscillateur amorti (présence de frottement et donc dissipation d'énergie)

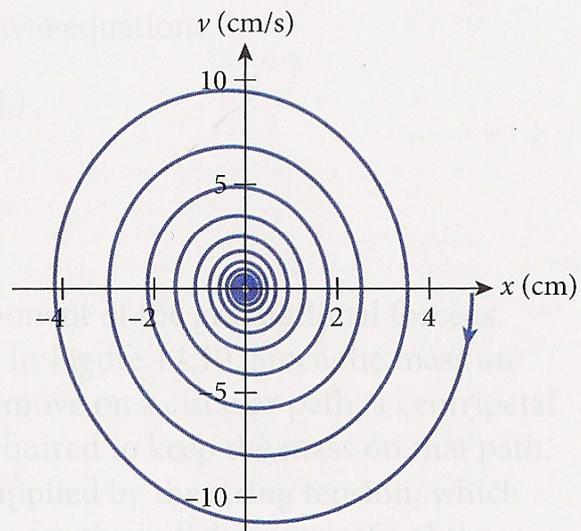
Dans ce cas la situation est plus compliquée donc plus riche. Dans le cas d'un faible amortissement,  $Q = 4$  de la figure ci dessus à droite, l'évolution n'est plus périodique. A l'instant auquel le portrait de phase débute,  $\left( \dot{x} = 0, x = x_0 \right)$  ( $x$  noté  $u$  sur la figure), cela correspond (pour un oscillateur mécanique) à une position initiale différente de la position d'équilibre et une vitesse initiale nulle. Ensuite l'oscillateur se met en mouvement. Cela se traduit par une trajectoire de phase qui s'enroule en amenant la mobile de plus en plus près de la situation d'équilibre  $\left( \dot{x} = 0, x = 0 \right)$ . Cet enroulement signifie que le système se rapproche de la position d'équilibre en réalisant des oscillations d'amplitude décroissante car il y a des pertes d'énergie, il s'agit du régime pseudopériodique. Au bout d'un temps suffisamment long, le système atteint sa valeur d'équilibre  $\left( \dot{x} = 0, x = 0 \right)$ . On se rend compte qu'il s'agit d'un équilibre stable. On parle de **centre attracteur**. Si le système est un peu écarté de sa position d'équilibre, il la rejoint en effectuant une spirale convergente autour.

L'évolution temporelle des cas critiques et apériodique est nettement différente. Il n'y a pas d'enroulement. La valeur finale est en revanche inchangée, il s'agit toujours du point attracteur  $\left( \dot{x} = 0, x = 0 \right)$ .

La figure ci-dessous montre le portrait de phase d'un oscillateur harmonique et d'un oscillateur amorti (damped an en anglais) en régime pseudo-périodique.



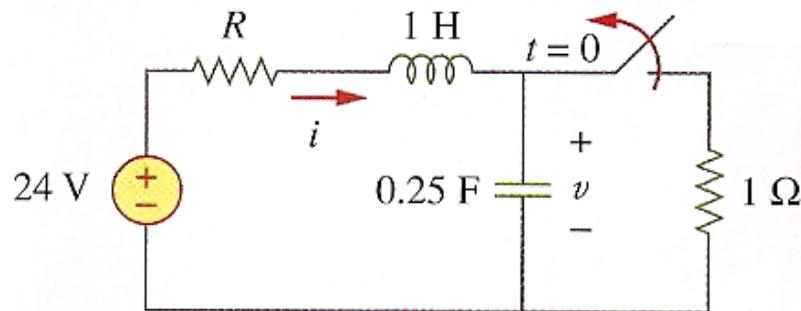
**FIGURE 14.33** Velocity versus displacement for different amplitudes of simple harmonic motion.



**FIGURE 14.34** Velocity versus displacement for a damped oscillator.

## VII – Autre circuit, tracé de courbes avec Python

On considère le circuit ci-dessous. À  $t > 0$ , on ouvre l'interrupteur. Montrez, en prenant en compte les conditions initiales et les grandeurs qui ne subissent pas de discontinuités, que l'on obtient les résultats suivants :



⇒ Si  $R = 5 \Omega$  : régime apériodique

$$\begin{cases} v_c(t) = 24 + \frac{4}{3}(-16e^{-t} + e^{-4t}) \text{ V} \\ i(t) = \frac{4}{3}(4e^{-t} + e^{-4t}) \text{ A} \end{cases}$$

⇒ Si  $R = 4 \Omega$  : régime critique

$$\begin{cases} v_c(t) = 24 - 19.2(1+t)e^{-2t} \text{ V} \\ i(t) = (4.8 + 9.6t)e^{-2t} \text{ A} \end{cases}$$

⇒ Si  $R = 1 \Omega$  : régime pseudo-périodique

$$\begin{cases} v_c(t) = 24 + (21.694 \sin(1.936t) - 12 \cos(1.936t))e^{-0.5t} \text{ V} \\ i(t) = (3.1 \sin(1.936t) + 12 \cos(1.936t))e^{-0.5t} \end{cases}$$

Le code Python suivant permet de tracer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur et du courant dans le circuit. Nous avons aussi tracé le portrait de phase dans le cas du régime pseudo-périodique.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def V1(t):
    tension=24+(4/3)*(-16*np.exp(-t)+np.exp(-4*t))
    return tension

def I1(t):
    intensite=(4/3)*(4*np.exp(-t)+np.exp(-4*t))
    return intensite

def V2(t):
    tension=24-19.2*(1+t)*np.exp(-2*t)
    return tension

def I2(t):
    intensite=(4.8+9.6*t)*np.exp(-2*t)
    return intensite

def V3(t):
    tension=24+(21.694*np.sin(1.936*t)-12*np.cos(1.936*t))*np.exp(-0.5*t)
    return tension

def I3(t):
    intensite=(3.1*np.sin(1.936*t)+12*np.cos(1.936*t))*np.exp(-0.5*t)
    return intensite
```

```

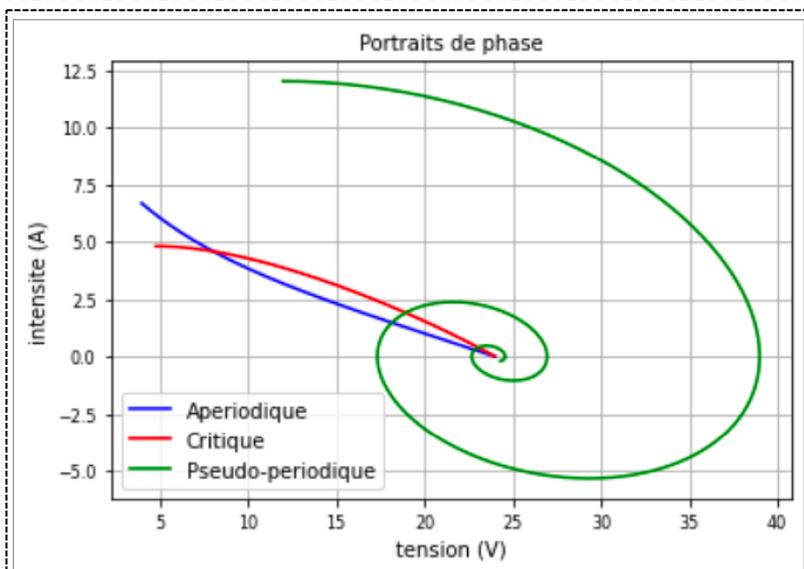
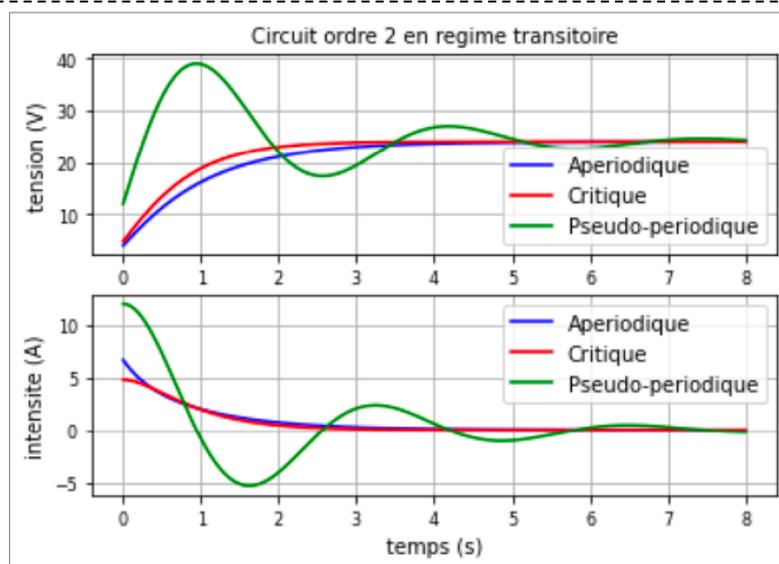
t = np.linspace(0, 8, 1000)
tension1 = V1(t)
intensity1 = I1(t)
tension2 = V2(t)
intensity2 = I2(t)
tension3 = V3(t)
intensity3 = I3(t)

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t,tension1,'b-', markersize=3)
plt.plot(t,tension2,'r-', markersize=3)
plt.plot(t,tension3,'g-', markersize=3)
plt.grid()
plt.title('Circuit ordre 2 en regime transitoire',size=10)
plt.ylabel('tension (V)',size=10)
plt.legend(['Aperiodique','Critique','Pseudo-periodique'],fontsize=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t,intensity1,'b-', markersize=3)
plt.plot(t,intensity2,'r-', markersize=3)
plt.plot(t,intensity3,'g-', markersize=3)
plt.grid()
plt.xlabel('temps (s)',size=10)
plt.ylabel('intensite (A)',size=10)
plt.legend(['Aperiodique','Critique','Pseudo-periodique'],fontsize=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)
plt.show()

plt.plot(tension1,intensity1,'b-', markersize=3)
plt.plot(tension2,intensity2,'r-', markersize=3)
plt.plot(tension3,intensity3,'g-', markersize=3)
plt.title('Portraits de phase',size=10)
plt.legend(['Aperiodique','Critique','Pseudo-periodique'],fontsize=10)
plt.grid()
plt.xlabel('tension (V)',size=10)
plt.ylabel('intensite (A)',size=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)
plt.show()

```



## VIII – Résolution des équations différentielles avec PYTHON

On considère à nouveau le circuit du paragraphe précédent en régime **pseudopériodique** avec  $R = 1 \Omega$ . Dans ce cas, vous pouvez montrer les résultats suivants :

$$\Rightarrow \text{Si } R = 1 \Omega : \text{régime pseudo-périodique}$$
$$\text{Conditions initiales: } v_c(0^+) = 12 \text{ V et } \left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{0^+} = 48 \text{ V.s}^{-1}$$
$$\text{Equation différentielle ordre 2: } \frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{dv_c}{dt} + 4v_c = 96$$

On se propose de résoudre cette équation différentielle par plusieurs méthodes en utilisant Python.

### 8.1 Résolution numérique par la méthode d'Euler

Pour appliquer la méthode de résolution approchée numérique d'Euler (cf. cours d'informatique), il faut d'abord transformer l'équation différentielle d'ordre 2 en un système de deux équations différentielles d'ordre 1. Comme  $dv_c/dt = i/C$  avec ici  $C = 0,25 \text{ F}$ , on obtient :

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = 4i(t)$$
$$\frac{di(t)}{dt} = -i(t) - v_c(t) + 24$$

Nous allons donc résoudre numériquement ce système avec  $v(0^+) = 12 \text{ V}$  et  $i(0^+) = 12 \text{ A}$ . L'approximation d'Euler explicite donne (cf. cours d'informatique) :

$$\text{Méthode d'Euler}$$
$$v_{c\ k+1} \approx v_{c\ k} + \delta t \times [4 \times i_k]$$
$$i_{k+1} \approx i_k + \delta t \times [-i_k - v_{c\ k+1} + 24]$$

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tension(t):
    tension=24+(21.694*np.sin(1.936*t)-12*np.cos(1.936*t))*np.exp(-0.5*t)
    return tension

def intensite(t):
    intensite=(3.1*np.sin(1.936*t)+12*np.cos(1.936*t))*np.exp(-0.5*t)
    return intensite

t_calcul = np.linspace(0, 10, 1000)
vc_calcul = tension(t_calcul)
i_calcul = intensite(t_calcul)

def euler(T,n):
    dt=T/(n-1)
    t=np.linspace(0,T,n)
    vc=np.zeros(n)
    i=np.zeros(n)
    vc[0]=12
    i[0]=12
    for k in range (n-1):
        vc[k+1]=vc[k]+dt*4*i[k]
        i[k+1]=i[k]+dt*(-i[k]-vc[k]+24)
    return vc, i, t
```

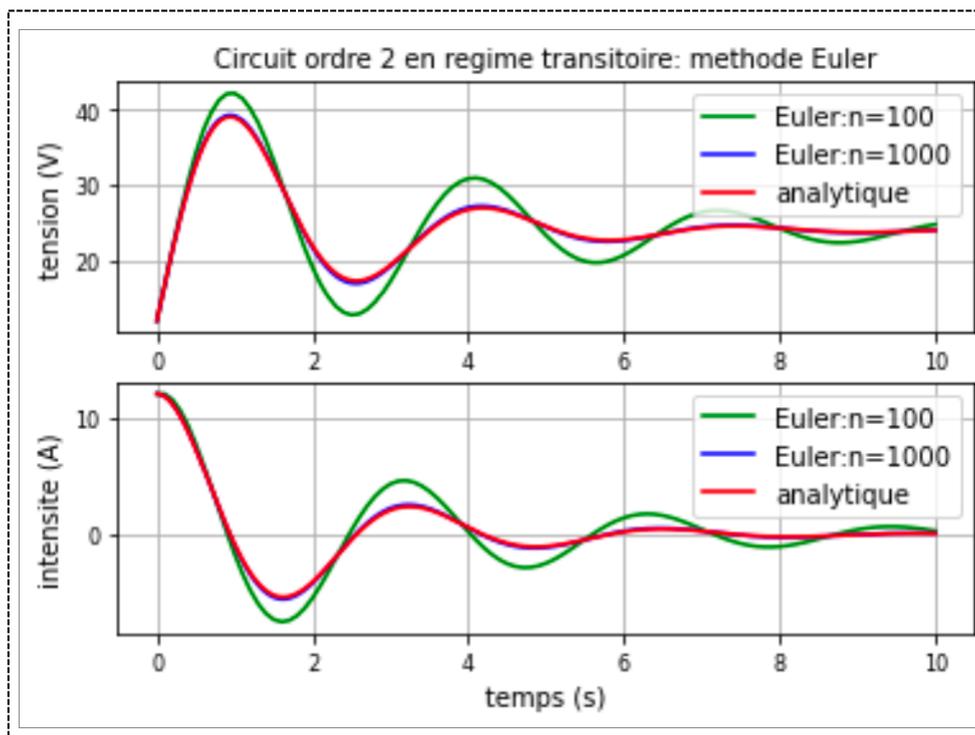
```

vc_num1,i_num1,t_num1 = euler(10,100)
vc_num2,i_num2,t_num2 = euler(10,1000)

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t_num1,vc_num1,'g-', markersize=3)
plt.plot(t_num2,vc_num2,'b-', markersize=3)
plt.plot(t_calcul,vc_calcul,'r-', markersize=3)
plt.grid()
plt.title('Circuit ordre 2 en regime transitoire: methode Euler',size=10)
plt.ylabel('tension (V)',size=10)
plt.legend(['Euler:n=100','Euler:n=1000','analytique'],fontsize=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t_num1,i_num1,'g-', markersize=3)
plt.plot(t_num2,i_num2,'b-', markersize=3)
plt.plot(t_calcul,i_calcul,'r-', markersize=3)
plt.grid()
plt.xlabel('temps (s)',size=10)
plt.ylabel('intensite (A)',size=10)
plt.legend(['Euler:n=100','Euler:n=1000','analytique'],fontsize=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)
plt.show()

```



## 8.2 Résolution avec odeint

Nous allons utiliser la fonction prédéfinie `odeint` de la sous-bibliothèque `integrate` de `scipy`.

```

from scipy.integrate import odeint

def ODE2(X,t):
    vc=X[0]
    i=X[1]
    dvcdt=4*i
    didt=-i-vc+24
    return [dvcdt,didt]

X0=[12,12]
t_odeint=np.linspace(0, 10, 1000)
sol=odeint(ODE2, X0, t_odeint)
vc_odeint=sol[:,0]
i_odeint=sol[:,1]

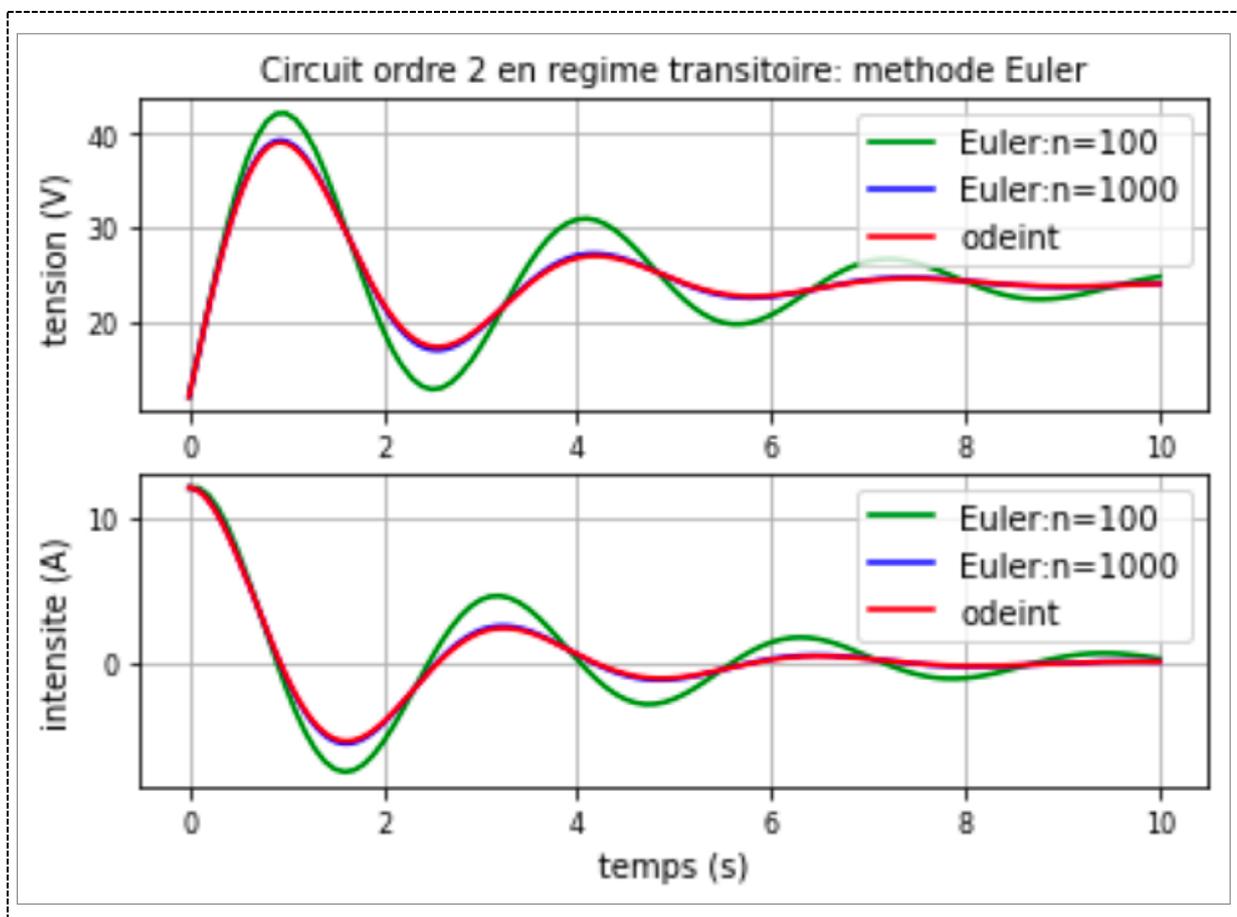
```

```

plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(t_num1,vc_num1,'g-', markersize=3)
plt.plot(t_num2,vc_num2,'b-', markersize=3)
plt.plot(t_odeint,vc_odeint,'r-', markersize=3)
plt.grid()
plt.title('Circuit ordre 2 en regime transitoire: methode Euler',size=10)
plt.ylabel('tension (V)',size=10)
plt.legend(['Euler:n=100','Euler:n=1000','odeint'],fontsize=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(t_num1,i_num1,'g-', markersize=3)
plt.plot(t_num2,i_num2,'b-', markersize=3)
plt.plot(t_odeint,i_odeint,'r-', markersize=3)
plt.grid()
plt.xlabel('temps (s)',size=10)
plt.ylabel('intensite (A)',size=10)
plt.legend(['Euler:n=100','Euler:n=1000','odeint'],fontsize=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)
plt.show()

```



A l'œil, on ne voit pas la différence entre la méthode d'Euler pour  $n=1000$  et la méthode de résolution numérique de Python. Mais il est évident que odeint est bien plus sophistiquée. Elle repose sur la méthode très populaire de **Runge-Kunta**, qui est très performante en terme de rapport précision/temps de calculs. La méthode d'Euler, qui est la méthode la plus simple pour résoudre numériquement des équations différentielles, est commode mais elle est gourmande en temps de calcul, peu manquer de précision et ainsi conduire à des résultats erronés. Il faut donc être vigilant !

### 8.3 Résolution symbolique avec la bibliothèque sympy

**sympy** est une bibliothèque Python pour les mathématiques symboliques qui permet de faire du calcul formel. Il vise à devenir un système d'algèbre informatique (CAS) complet (à l'image de Mathematica, Maple etc... qui sont des logiciels propriétaires) tout en gardant le code aussi simple que possible afin d'être compréhensible et facilement extensible. **sympy** est entièrement écrit en Python.

```
from sympy import symbols, dsolve, Function, Eq

t=symbols('t')
vc=symbols('vc', cls=Function)

solution=dsolve(Eq(vc(t).diff(t,t)+vc(t).diff(t)+4*vc(t),96),vc(t))

print(solution)
```

Le programme retourne la solution formelle telle qu'on l'obtient en réalisant le calcul analytique à la main. Les constantes restent à déterminer avec les conditions initiales, il faut donc poursuivre le calcul !

$$\text{Eq}(vc(t), (C1*\sin(\sqrt{15}*t/2) + C2*\cos(\sqrt{15}*t/2))*\exp(-t/2) + 24)$$

On obtient bien que  $\sqrt{15}/2 \approx 1,936$  comme pour la solution indiquée à la page 11, paragraphe VII. `dsolve` ne fonctionne évident que si une solution analytique de notre équation différentielle existe. Cette situation est hélas plus l'exception que la règle générale (les exceptions sont cependant importantes en science).

La majorité des équations différentielles non linéaires ou à coefficients variables rencontrée en pratique n'ont pas de solutions analytiques, **d'où l'importance des méthodes numériques en sciences.**